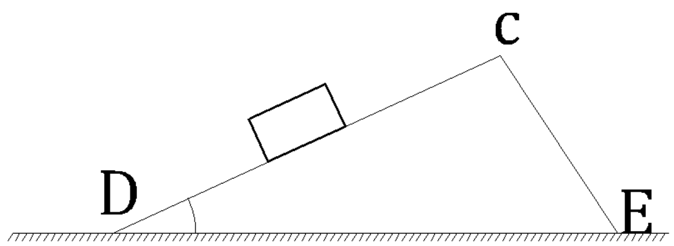
مسائل تحريك الجملة الميكانيكية

م.غيث برهاني

المسألة الأولى:



ثقل وزنه W_2 قابل للانزلاق على المستوي المائل بزاوية α

على إسفين (جسم متحرك)ECD وزنه W_1 يرتكز بقاعدته

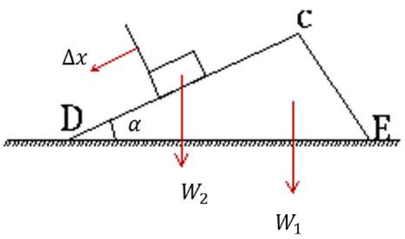
ED على سطح افقي أملس ،فإذا كانت المجموعة ساكنة لحظة البدء وكانت حركة الثقل على المستوي CD متسارعة

بتسارعA وفق العلاقة $x = \frac{1}{2}at^2$

المطلوب :

- عين بإهمال مقاومة الهواء... حركة الاسفين على السطح الأفقي... أي (مقدار واتجاه) كل من السرعة والانتقال عند انزلاق الثقل مسافة Δx

الحل:



لإيجاد مقدار واتجاه سرعة الاسفين نحرر الجملة من قيودها فنلاحظ أن **جميع القوى** المتمثلة ب(ثقل الجسم W_1 وثقل الاسفين W_2 ورد فعل الأرض على الاسفين N) **عمودية** على محور الانتقال $\vec{x}$ (الأفقي الموجه نحو اليسار)

لذلك **نطبق مبدأ الدفع و كمية الحركة** بين وضعين: السرعة الابتدائية (وضع السكون) ، وحتى اللحظة المحددة بانتقال الثقل مسافة Δx:

$$\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_2} = \overrightarrow{I_N} + \overrightarrow{I_{W_1}} + \overrightarrow{I_{W_2}}$$

بالاسقاط على $\vec{x}$:

$$(I)......Q_{1_x} - Q_{0_x} = 0$$

حيث:1- $(Q_{0_x} = 0)$مسقط كمية الحركة الابتدائية على $\vec{x}$ (لان المجموعة ساكنة لحظة البدء)0

-2 Q_{1_x} مسقط كمية حركة الجملة على الحمور $\vec{x}$ بعد الانتقال المحدد Δx وتساوي:

$$Q_{1_x} = q_{1_x} + q_{2_x}$$

وحيث: q_{1_x} مسقط كمية حركة الاسفين بعد الانتقال المحدد Δx

q_{2_x} مسقط كمية حركة الثقل بعد الانتقال المحدد Δx

بالتعويض في (I):

$$II \ldots Q_{1_x} = 0 \Longrightarrow q_{1_x} + q_{2_x} = 0$$

ولدينا: $q_{1_x} = m_1 . v_{1_x}$; $v_{1_x} = v$ **(لأن سرعة الإسفين توازي محور الحركة $\vec{x}$)**

ولدينا: $q_{2_x} = m_2 . v_{2_x}$

حركة الثقل حركة مركبة أي: $\vec{V}_2 = \vec{V}_{2_r} + \vec{V}_{2_e}$ **حيث:** $V_{2_e} = V$ **(تساوي سرعة الاسفين)**

بالاسقاط على $\vec{x}$:

$$v_{2_x} = v - v_{2_r} . cos\alpha$$

ولدينا: $v_{2_r} = \frac{d}{dt}(x_r) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}At^2\right) = A.t$

بالتعويض في II: $m_1 . v + m_2(v - A.t.cos\alpha) = 0$

نضرب بـ g: $W_1 . v + W_2 . v - W_2 . A.t.cos\alpha = 0$

ومنه: $v = -\frac{W_2 .A.t.cos\alpha}{W_1 + W_2}$ **(الإشارة السالبة تدل على أن الجهة السرعة عكس محور $\vec{x}$)**

ولحساب الانتقال نلجأ للطريقة الأسهل وهي التكامل حيث:

$$\frac{d}{dt}(x_1) = -\frac{W_2 . A.t.cos\alpha}{W_1 + W_2}$$

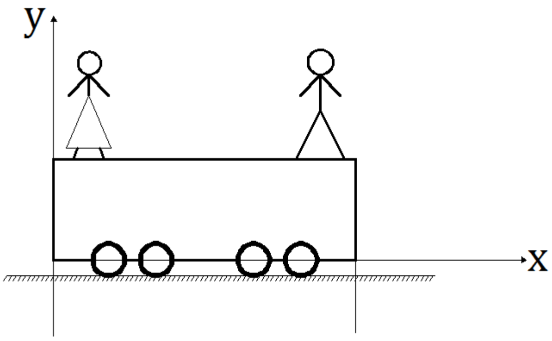
بالتفريق والمكاملة: $\int_0^{\Delta x} dx_1 = -\frac{W_2 .A.cos\alpha}{W_1 + W_2}\int_0^t dt$

$$\Longrightarrow \Delta x_1 = -\frac{W_2 . cos\alpha}{W_1 + W_2}\left(\frac{1}{2}At^2\right)$$

$$\Longrightarrow \Delta x_1 = -\frac{W_2 . cos\alpha}{W_1 + W_2}(x_r)$$

الإشارة السالبة تدل على أن الانتقال بعكس جهة محور $\vec{x}$

المسألة الثانية:

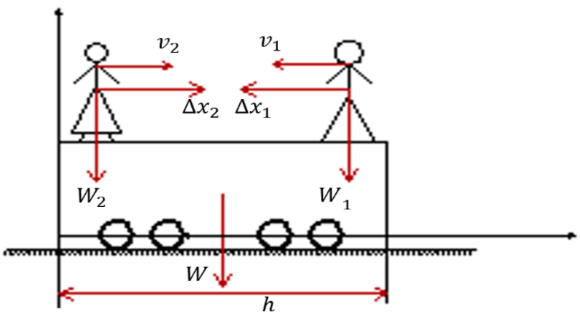


رجل كتلته m_1 وامرأة كتلتها m_2 يقفان على طرف عربة ساكنة طولها l كتلتها m قابلة للحركة على سطح أفقي؛ إذا كانت العربة ساكنة في الوضع الابتدائي ؛ وبدأ الرجل حركته بسرعة v_1 بالنسبة للعربة ؛ وبدأت المرأة حركتها بسرعة v_2 بالنسبة للعربة.

المطلوب:

1. أوجد بإهمال مقاومة الهواء على السطح الأفقي وباعتبار الجملة OXY مايلي:
2. علاقة سرعة العربة وناقش قيمها واتجاهها.
3. علاقة انتقال العربة بدلالة الانتقالين Δx_2 , Δx_1 (انتقال الرجل وانتقال المرأة)

الحل:



بما أن القوى المؤثرة على الجملة (العربة و الرجل والمرأة) والمتمثلة بـ(ثقل الرجل W_1 وثقل المرأة W_2 وثقل العربة W ورد فعل الأرض على العربة N) جميعها عمودية على محور الحركة؛ نطبق مبدأ الدفع وكمية الحركة بين وضعين... الأول عندما بدأت من السكون... والثاني عند انتقال عناصر الجملة مسافات محددة Δx , Δx_2 , Δx_1

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \vec{I}_N + \vec{I}_{W_1} + \vec{I}_{W_2} + \vec{I}_w$$

بإسقاط هذه العلاقة على $\vec{x}$: $Q_{1_x} - Q_{0_x} = 0$

بما أن الجملة بدأت من السكون: $Q_{0_x} = 0 \Longrightarrow Q_{1_x} = 0$

حيث Q_{1_x} مسقط كمية حركة الجملة بعد انتقال عناصرها بالمسافات المحددة:

$$Q_{1_x} = q_{1_x} + q_{2_x} + q_x = 0$$

حيث q_x , q_{2_x} , q_{1_x} مساقط كمية حركة عناصر الجملة على المحور $\vec{x}$:

$$Q_{1_x} = m_1 . v'_{1_x} + m_2 . v'_{2_x} + m . v_x$$

حيث v'_{2_x} , v'_{1_x} السرع المطلقة للرجل والمرأة وهي عبارة عن سرعات مركبة وهي موازية لـ $\vec{x}$: ($v'_1 = -v'_{1_r} +$ v'_{1_e} ,,, $v'_2 = v'_{2_r} + v'_{2_e}$)

ولدينا: $v'_{1_r} = v_1$ سرعة الرجل بالنسبة للعربة

$v'_{2_r} = v_2$ سرعة المرأة بالنسبة للعربة

نعوض في I:

$$Q_x = m_1(-v_1 + v) + m_2(v_2 + v) + m.v = 0$$

$$\Longrightarrow -m_1.v_1 + m_1.v + m_2.v_2 + m_2.v + m.v = 0$$

$$\Longrightarrow v(m_1 + m_2 + m) = m_1.v_1 - m_2.v_2$$

$$\Longrightarrow v = \frac{m_1.v_1 - m_2.v_2}{m_1 + m_2 + m}$$

- عندما: $m_1.v_1 > m_2.v_2$ تكون الحركة بجهة $\vec{x}$
- عندما: $m_1.v_1 < m_2.v_2$ تكون الحركة بعكس جهة $\vec{x}$
- عندما: $m_1.v_1 = m_2.v_2$ تتوقف العربة تبقى ساكنة

حسب الانتقال: لدينا من العلاقة I :

$$m_1.\frac{d}{dt}(x'_1) + m_2.\frac{d}{dt}(x'_2) + m.\frac{d}{dt}(x) = 0$$

$$m_1.\Delta x'_1 + m_2.\Delta x'_2 + m.\Delta x = 0$$

المجموع الجبري لجداءات كتل أو أوزان مساقط الانتقال المطلق لمراكز الثقل لأجزاء الجملة يساوي الصفر:

لدينا: $\Delta x'_1 = -\Delta x_1 + \Delta x$ (الاشارة السالبة ل Δx_1 حسب اتجاه المحور المفروض).

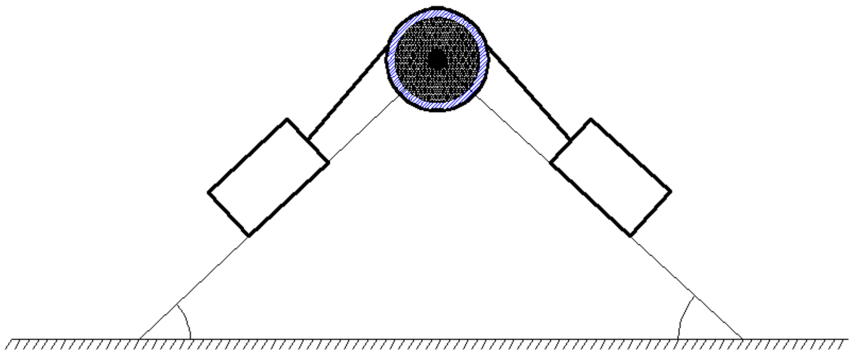
$$\Delta x'_2 = \Delta x_2 + \Delta x$$

$$\Longrightarrow m_1(\Delta x_1 + \Delta x) + m_2(\Delta x_2 + \Delta x) + m.\Delta x = 0$$

$$\Longrightarrow \Delta x = \frac{m_1.\Delta x_1 - m_2.\Delta x_2}{m_1 + m_2 + m}$$

- عندما: $(m_1.\Delta x_1 > m_2.\Delta x_2)$ يكون الانتقال بجهة $\vec{x}$
- عندما: $(m_1.\Delta x_1 < m_2.\Delta x_2)$ يكون الانتقال عكس جهة $\vec{x}$
- عندما: $(m_1.\Delta x_1 = m_2.\Delta x_2)$ العربة لا تنتقل

المسألة الثالثة:



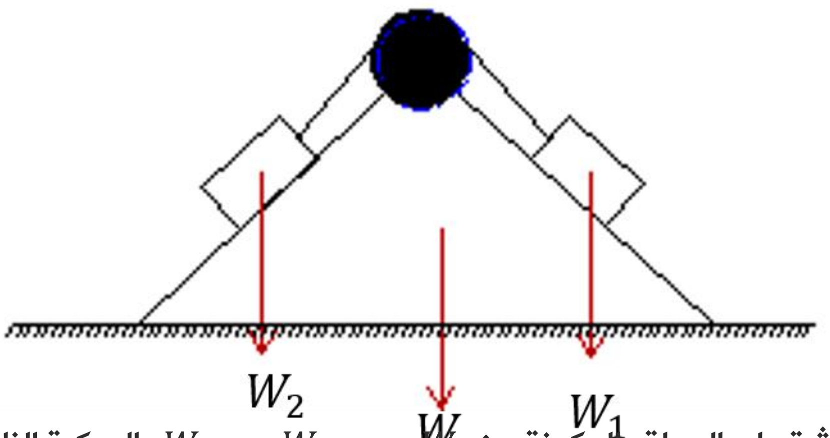
جسيمان A و B وزنهما على التوالي W_A و W_B يتصلان بواسطة حبل غير قابل للاستطالة يمر عبر بكرة مهملة C بحيث ينزلق الجسيمان على الجانبين الأملسين لإسفين ECD قائم الزاوية وزنه W ومركز كتلته G ويرتكز بقاعدته DE على مستوي أفقي أملس كما هو موضح في الشكل

المطلوب: (باعتبار أن الجملة بدأت من السكون)

1. مقدار واتجاه انتقال الاسفين على المستوي الأفقي عند انزلاق الجسيم A لمسافة قدرها Δs_A مهملا كتلة كل من البكرة والحبل.
2. مقدار انتقال الاسفين بدلالة المقادير التالية:

$$\theta = 30° \quad و \quad \Delta s_A = 20\ cm \quad و \quad W + 4W_A = 16W_B$$

الحل:



1- نلاحظ أن القوى المؤثرة على الجملة والمكونة من W_A و W_B و W والمركبة الناظمية لقوى الاتصال مع المستوي الأفقي N وهي عمودية على محور حركة الاسفين X المفروض من E إلى Dلذا نستخدم علاقة مسقط تغير كمية الحركة لجملة على محور الحركة X لإيجاد انتقال الاسفين حيث نحصل على :

$$\sum F_X^e = 0 \Longrightarrow \sum I_X^e = 0 \Longrightarrow Q_{1_X} - Q_{0_X} = 0$$

وبما أن : $Q_{0_X} = 0 \Longrightarrow Q_{1_X} = 0 \Longrightarrow q_{A_X} + q_{B_X} + q_{G_X} = 0$

بالتعويض نحصل على العلاقة: $(m_A.v_{A_X} + m_B.v_{B_X} + m.v_{G_X} = 0)$

التي تكتب بعد ضربها بـ g بالشكل :

$$W_A.\frac{d}{dt}(x_A) + W_B.\frac{d}{dt}(x_B) + W.\frac{d}{dt}(x_G) = 0$$

منه نحصل على: $W_A.\Delta x_A + W_B.\Delta x_B + W.\Delta x_G = 0$

حيث Δx_G تمثل الانتقال الأفقي للاسفين ونفرضه باتجاه محور الحركة. وΔx_A تمثل الانتقال الأفقي للجسيم A ويساوي إلى:

$$\Delta x_A = \Delta x_{Ar} + \Delta x_{Ae} \Longrightarrow \Delta x_A = -\Delta s_A.cos\theta + \Delta x_G$$

و Δx_B تمثل الانتقال الأفقي الجسيم B ويساوي إلى:

$$\Delta x_B = \Delta x_{Br} + \Delta x_{Be} \Longrightarrow \Delta x_B = -\Delta s_B.cos\alpha + \Delta x_G$$

وبما أن الخيط لا يمتط : $\Delta s_A = \Delta s_B = \Delta s$

منه: $\Delta x_B = -\Delta s_A.sin\theta + \Delta x_G$

بالتعويض:

$$W_A(\Delta x_G - \Delta s_A.cos\theta) + W_B(\Delta x_G - \Delta s_A.sin\theta) + W.\Delta x_G = 0$$

$$(W_A + W_B + W)\Delta x_G = (W_A.cos\theta + W_B.sin\theta)\Delta s_A$$

ومنه نحصل على: $\Delta x_G = \frac{W_A.cos\theta + W_B.sin\theta}{W_A + W_B + W0}\Delta s_A$

نلاحظ أن القيمة موجبة وهذا يدل على أن الحركة بجهة محور X

بالتعويض في القيم العددية:

$$\Delta x_G = \frac{\frac{W_A}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W_B}{16}.\frac{1}{2}}{\frac{W}{4} + \frac{W}{16} + W} 20 = \frac{0.2165 + 0.03125}{0.25 + 0.0625 + 1} 20 = 3.78\ cm$$